

Zwizek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu

$$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1} \quad n > 1$$

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$S_n$  - suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego  
 $q$  - iloraz ciągu geometrycznego

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad q \neq 1$$

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej

Jednomian stopnia  $n$  to wyrażenie postaci  $a \cdot x^n$ ,  $a \in \mathbb{R}$

Wielomian stopnia  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  to wyrażenie postaci

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ ,  $a_n \neq 0$  to współczynniki wielomianu

Suma wszystkich współczynników wielomianu  $W(x)$  jest równa  $W(1)$

## Działania na wielomianach

Dodawanie i odjmowanie wielomianów

$$P(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1 \quad W(x) = 2x^2 + x + 2$$

$$Q(x) = P(x) + W(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1 + 2x^2 + x + 2 = 3x^4 + 4x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) - W(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1 - (2x^2 + x + 2) = \\ &= 3x^4 + 2x^2 - x + 1 - 2x^2 - x - 2 = 3x^4 - 2x - 1 \end{aligned}$$

Mnożenie wielomianów

$$V(x) = x^3 + x + 2 \quad P(x) = x^2 + 2x$$

$$Q(x) = P(x) \cdot V(x) = (x^2 + 2x)(x^3 + x + 2) = x^5 + x^3 + 2x^2$$

$$+ 2x^4 + 2x^2 + 4 = 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4$$

## Równość wielomianów

Dwa wielomiany są równe, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej  $x$ .

$$\text{Np. } \begin{aligned} V(x) &= x^3 + 6x^2 + x + 1 & V(x) &\equiv P(x) \\ P(x) &= x^3 + 6x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

## Wzory skróconego mnożenia

$$1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$2) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$3) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$4) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

## Podzielność wielomianów

Wielomian  $V(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$ ,  $P(x) \neq 0$ , gdy istnieje wielomian  $Q(x)$ , dla którego  $V(x) = Q(x) \cdot P(x)$

Np. Wielomian  $x^2 - 4$  jest podzielny przez wielomiany  $x - 2$  i  $x + 2$ , bo

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$x^2 - 4 : (x - 2) = x + 2$$

dzielnik      iloczyn

$$x^2 - 4 : (x + 2) = x - 2$$

dzielnik      iloczyn

## Dzielenie wielomianów

$$V(x) = 2x^3 - x - 51 \quad P(x) = x - 3$$

$$(2x^3 - x - 51) : (x - 3)$$

$$- 2x^3 + 6x^2$$

$$6x^2 - x - 51$$

$$- 6x^2 + 18x$$

$$17x - 51$$

$$- 17x + 51$$

$$0$$

$$2x^3 - x - 51 = (x - 3)(2x^2 + 6x + 17)$$

1) Pierwszy wyraz wielomianu  $V(x)$  dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika

2) Otrzymany wynik mnożymy przez dzielnik i odjmujemy  $V(x) - 2x^2(x - 3)$

3) Powtarzamy, otrzymujemy nową resztę koniec dzielenia

Reszta z dzielenia wielomianu  $U(x)$  przez dwumian  $x-2$  jest równa  $U(2)$

Schemat Hornera

$$4x^4 - 2x^3 + 8x^2 + x - 3 : (x+2)$$

|    |   |   |      |      |       |       |
|----|---|---|------|------|-------|-------|
|    | ↓ | 4 | -2   | 8    | 1     | -3    |
| -2 | ↓ | 4 | -8-2 | 20+8 | -56+1 | 110-3 |
|    |   |   | -10  | 28   | -55   | 107   |

↓  
mniejsza reszta  
dzielnika

reszta

wynik dzielenia:  $4x^3 - 10x^2 + 28x - 55$  r. 107

Pierwiastek Wielomianu. Twierdzenie Bézouta.

Pierwiastek wielomianu  $U(x)$  to liczba rzeczywista  $a$ , dla której  $U(a) = 0$

Np.  $U(x) = (x-2)(x+5)(x^2+3)(x-6)$

Pierwiastkami wielomianu  $U(x)$  są liczby: 2, -5 i 6

Twierdzenie Bézouta

Liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $U(x)$ , wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian  $U(x)$  jest podzielny przez dwumian  $x-a$

## Pierwiastki wymierne wielomianu

Jeśli wszystkie współrzędne wielomianu  $V(x)$  są liczbami całkowitymi i wielomian ma pierwiastek całkowity to pierwiastek ten znajduje się w zbiorze dzielników wyrazu wolnego.

Np. Pierwiastkami całkowitymi wielomianu  $V(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$  mogą być liczby  $1, 3, -1, -3$

Jeśli wszystkie współrzędne wielomianu  $V(x)$  są liczbami całkowitymi i wielomian ma pierwiastek wymierny to pierwiastek wymierny jest ułamkiem nieskracalnym, którego licznikiem jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a mianownikiem dzielnikiem współczynnika an przy najwyższej potęgce zmiennej.

Np. Pierwiastkami wymiernymi wielomianu  $V(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$  mogą być liczby  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, 3, -3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

## Równania wielomianowe

Równanie wielomianowe to równanie, które można równowrotnie przekształcić do postaci  $V(x) = 0$

Przykład:  $2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x^2(2x - 1) - 2(2x - 1) = 0$$

$$(2x - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad x = \sqrt{2} \quad x = -\sqrt{2}$$