

Ułamki algebraiczne i działania na nich

Ułamek algebraiczny to wyrażenie postaci $\frac{U(x)}{P(x)}$, którego licznikiem jest wielomian $U(x)$, a mianownikiem wielomian $P(x)$ oraz $P(x) \neq 0$.

Dziedzinę ułamka algebraicznego $\frac{U(x)}{P(x)}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wielomian $P(x)$ nie przyjmuje wartości zero.

Jak ustalić dziedzinę ułamka algebraicznego?

1) Ustalemy dziedzinę ułamka $\frac{x^3 + 2x - 1}{x(x-3)(x+1)}$

2) Sprawdzamy, dla jakich argumentów mianownik ułamka przyjmuje wartość 0.

$$x(x-3)(x+1) = 0$$

$$x \in \{-1, 0, 3\}$$

3) Określiśmy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$

Skracanie ułamków algebraicznych

$$\frac{2x^3 - 6x^2}{x^4 - 9x^2} = \frac{2x^2(x-3)}{x^2(x^2-9)} = \frac{\cancel{2x^2}(\cancel{x-3})}{\cancel{x^2}(\cancel{x-3})(x+3)} = \frac{2}{x+3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$$

Rozszerzanie ułamków algebraicznych to mnożenie licznika i mianownika przez ten sam nierozny wielomian.

$$\text{Np. } \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{(x+1)}{(x+1)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych

Dodawanie lub odejmowanie ułamków o *tych samych mianownikach* przebiega przez dodanie lub odejęcie liczników.

Np.
$$\frac{3x+4}{x+1} - \frac{3x-5}{x+1} = \frac{12}{x+1} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Aby dodać lub odjąć ułamki o *różnych mianownikach* należy sprowadzić te ułamki do wspólnego mianownika.

Np.
$$5 - \frac{x}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{4x+5}{x+1} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

Ułamek dwóch ułamków to ułamek o liczniku równym iloczynowi liczników i mianownikiem równym iloczynowi mianowników tych ułamków.

Np.
$$\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x-1} = \frac{2x^2+6x}{x^2-1} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Ułamek dwóch ułamków to iloczyn pierwszego ułamka i odwrotności drugiego.

Np.
$$\frac{x^2-25}{3x^3-9x^2} : \frac{x+5}{x^3-3x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{3x^2(x-3)} \cdot \frac{x^2(x-3)}{x+5} = \frac{x-5}{3}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, -3\}$$

Równania wymierne

Równanie wymierne to równanie, które można równoważnie przekształcić do postaci $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$, gdzie $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x) \neq 0$.

Jak rozwiązywać równania wymierne?

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 3} = 0$$

1) Określimy dziedzinę.

$$3x - 3 = 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$3(x - 3) = 0$$

$$x = 3$$

2) Sprawdzamy, dla jakich argumentów licznik jest równy 0.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{- nie należy do dziedziny}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{- należy do dziedziny}$$

3) Położymy mianownik.

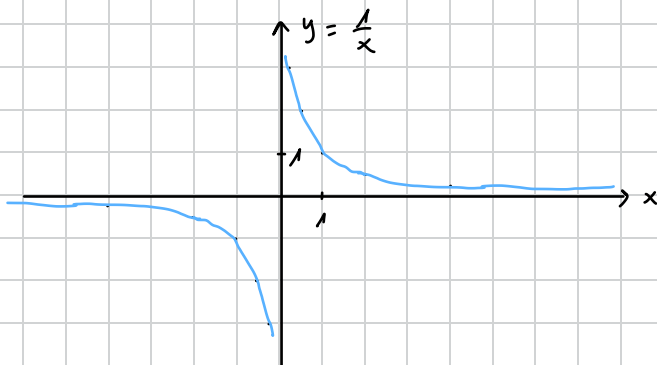
$$x = 2$$

Funkcja homograficzna

Funkcja homograficzna to funkcja $\frac{Ax+B}{Cx+D}$, gdzie $C \neq 0$ i $AD-BC \neq 0$.

Dziedzina funkcji homograficznej jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{D}{C}\}$

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola



$$y = \frac{-2x-4}{x+3} = \frac{-2(x+3)+2}{x+3} = \frac{2}{x+3} - 2$$

